Chương 6

MẠNG TÍNH TOÁN

6.1. MỞ ĐẦU

Mạng tính toán là một dạng biểu diễn tri thức có thể dùng biểu diễn các tri thức về các vấn đề tính toán và được áp dụng một cách có hiệu quả để giải quyết các vấn đề này. *Mỗi mạng tính toán là một mạng ngữ nghĩa chứa các biến và những quan hệ có thể cài đặt và sử dụng được cho việc tính toán*. Có thể nói rằng mạng tính toán là một sự tổng quát hoá của kiểu dữ liệu trừu tượng có khả năng tự xây dựng các hàm dùng cho việc tổng hợp thành các chương trình.

Trong chương nầy chúng ta xét một mạng tính toán gồm một tập hợp các biến cùng với một tập các quan hệ (chẳng hạn các công thức) tính toán giữa các biến. Trong ứng dụng cụ thể mỗi biến và giá trị của nó thường gắn liền với một khái niệm cụ thể về sự vật, mỗi quan hệ thể hiện một sự tri thức về sự vật.

Cách biểu diễn tri thức tính toán dưới dạng các đối tượng nầy rất tự nhiên và gần gũi đối với cách nhìn và nghĩ của con người khi giải quyết các vấn đề tính toán liên quan đến một số khái niệm về các đối tượng, chẳng hạn như các tam giác, tứ giác, hình bình hành, hình chữ nhật....

6.2. MẠNG TÍNH TOÁN

6.2.1. Các quan hệ

Cho M = {x1,x2,...,xm} là một tập hợp các biến có thể lấy giá trị trong các miền xác định tương ứng D1,D2,...,Dm. Đối với mỗi quan hệ R $\subseteq$ D1xD2x...xDm trên các tập hợp D1,D2,...,Dm ta nói rằng quan hệ này liên kết các biến x1,x2,...,xm, và ký hiệu là R(x1,x2,...,xm) hay vắn tắt là R(x) (ký hiệu x dùng để chỉ bộ biến < x1,x2,...,xm >). Quan hệ R(x) xác định một (hay một số) ánh xạ :

$$fR_{,u,v} : Du \to Dv,$$

trong đó u,v là các bộ biến và u $\subseteq$ x, v$\subseteq$ x; Du và Dv là tích của các miền xác định tương ứng của các biến trong u và trong v.

Ta có thể thấy rằng quan hệ R(x) có thể được biểu diễn bởi một ánh xạ fR,u,v với u $\cup$ v = x, và ta viết :

$$fR,u,v : u \to v,$$

hay vắn tắt là:

$$f : u \to v.$$

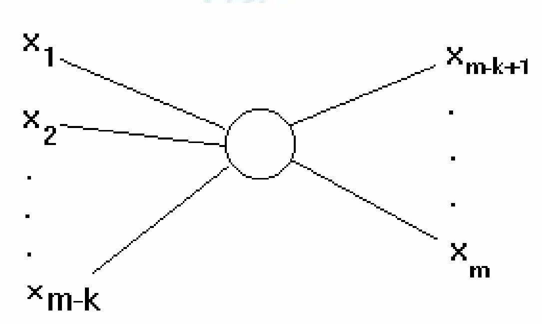
Đối với các quan hệ dùng cho việc tính toán, cách ký hiệu trên bao hàm ý nghĩa như là một hàm: ta có thể tính được giá trị của các biến thuộc v khi biết được giá trị của các biến thuộc u.

Trong phần sau ta xét các quan hệ xác định bởi các hàm có dạng:

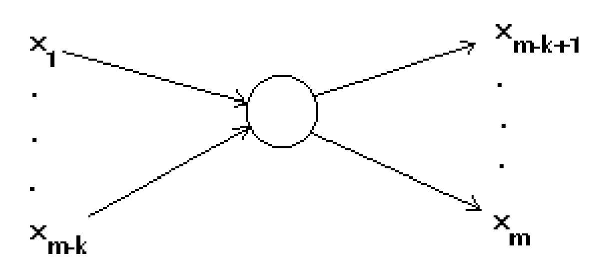
$$f : u \to v,$$

trong đó u $\cap$ v = $\varnothing$ (tập rỗng). Đặc biệt là các ***quan hệ đối xứng*** có hạng (rank) bằng một số nguyên dương k. Đó là các quan hệ mà ta có thể tính được k biến bất kỳ từ m-k biến kia (ở đây x là bộ gồm m biến < x1,x2,...,xm >). Ngoài ra, trong trường hợp cần nói rõ ta viết u(f) thay cho u, v(f) thay cho v. Đối với các quan hệ không phải là đối xứng có hạng k, không làm mất tính tổng quát, ta có thể giả sử quan hệ xác định duy nhất một hàm f với tập biến vào là u(f) và tập biến ra là v(f); ta gọi loại quan hệ này là quan hệ không đối xứng xác định một hàm, hay gọi vắn tắt là ***quan hệ không đối xứng***.

Ta có thể vẽ hình biểu diễn cho các quan hệ đối xứng và các quan hệ không đối xứng (xác định một hàm) như trong hình 6.1 và 6.2.



Hình 6.1. Quan hệ đối xứng có hạng k



Hình 6.2. Quan hệ không đối xứng có hạng k

Nhận xét

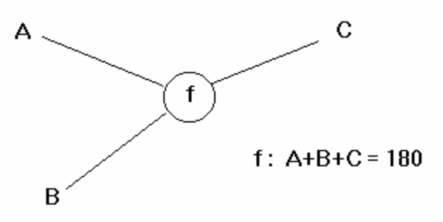
1/ Một quan hệ không đối xứng hạng k có thể được viết thành k quan hệ không đối xứng có hạng 1.

2/ Nếu biểu diễn một quan hệ đối xứng có hạng k thành các quan hệ đối xứng có hạng là 1 thì số quan hệ có hạng 1 bằng :

$$C_m^{m-k+1} = C_m^{k-1}$$

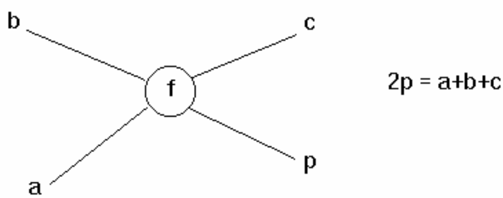
Dưới đây là một vài ví dụ về các quan hệ (tính toán) và mô hình biểu diễn tương ứng.

Ví dụ 1: Quan hệ f giữa ba góc A, B, C trong tam giác ABC cho bởi hệ thức: A+B+C = 180 (đơn vị: độ).



Quan hệ f giữa ba góc trong một tam giác trên đây là một quan hệ đối xứng có hạng 1.

Ví dụ 2: quan hệ f giữa nửa chu vi p với các độ dài của ba cạnh a, b, c:



Ví dụ 3: Quan hệ f giữa n biến x1, x2, ..., xn được cho dưới dạng một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm. Trong trường hợp này f là một quan hệ có hạng k bằng hạng của ma trận hệ số của hệ phương trình.

6.2.2. Mạng tính toán và các ký hiệu

Như đã nói ở trên, ta sẽ xem xét các mạng tính toán bao gồm một tập hợp các biến M và một tập hợp các quan hệ (tính toán) F trên các biến. Ta gọi một mạng tính toán một cách vắn tắt là một *MTT*, và trong trường hợp tổng quát có thể viết:

$$M = \{x_1, x_2, ..., xn\},$$

$$F = \{f_1, f_2, ..., fm\}.$$

Đối với mỗi $f \in F$, ta ký hiệu M(f) là tập các biến có liên hệ trong quan hệ f. Dĩ nhiên M(f) là một tập con của M: $M(f) \subseteq M$. Nếu viết f dưới dạng:

$$f : u(f) \rightarrow v(f)$$

thì ta có $M(f) = u(f) \cup v(f)$.

Ví dụ 4

Trong ví dụ 1 ở trên, ta có $M(f) = \{A,B,C\}$.

Trong ví dụ 2 ở trên, ta có $M(f) = \{a,b,c,p\}$.

Trong ví dụ 3 ở trên, ta có $M(f) = \{x_1, x_2, ..., xn\}$.

Ví dụ 5 : Mạng tính toán cho một hình chữ nhật.

Việc tính toán trên một hình chữ nhật liên quan đến một số giá trị của hình chữ nhật như sau :

b_1, b_2 : hai cạnh của hình chữ nhật;

d : đường chéo của hình chữ nhật;

s : diện tích của hình chữ nhật;

p : chu vi của hình chữ nhật;

trong đó mỗi biến đều có giá trị là thuộc tập các số thực dương. Giữa các biến ta đã biết có các quan hệ sau đây:

f_1 : $s = b_1 * b_2$;

f_2 : $p = 2 * b_1 + 2 * b_2$;

f_3 : $d^2 = b_1^2 + b_2^2$;

Các quan hệ này đều là các quan hệ đối xứng có hạng 1.

Như vậy tập biến và tập quan hệ của mạng tính toán này là :

$M = \{b_1, b_2, d, s, p\}$,

$F = \{f_1, f_2, f_3\}$.

6.3. VẤN ĐỀ TRÊN MẠNG TÍNH TOÁN

Cho một mạng tính toán (M,F), M là tập các biến và F là tập các quan hệ. Giả sử có một tập biến $A \subseteq M$ đã được xác định (tức là tập gồm các biến đã biết trước giá trị), và B là một tập biến bất kỳ trong M.

Các vấn đề đặt ra là

1. Có thể xác định được tập B từ tập A nhờ các quan hệ trong F hay không? Nói cách khác, ta có thể tính được giá trị của các biến thuộc B với giả thiết đã biết giá trị của các biến thuộc A hay không?

2. Nếu có thể xác định được B từ A thì quá trình tính toán giá trị của các biến thuộc B như thế nào?

3. Trong trường hợp không thể xác định được B, thì cần cho thêm điều kiện gì để có thể xác định được B.

Bài toán xác định B từ A trên mạng tính toán (M,F) được viết dưới dạng:

$$A \rightarrow B,$$

trong đó A được gọi là giả thiết, B được gọi là mục tiêu tính toán (hay tập biến cần tính) của vấn đề. Trường hợp tập B chỉ gồm có một phần tử b, ta viết vắn tắt bài toán trên là $A \rightarrow b$.

Định nghĩa 2.1

Bài toán $A \rightarrow B$ được gọi là ***giải được*** khi có thể tính toán được giá trị các biến thuộc B xuất phát từ giả thiết A. Ta nói rằng một dãy các quan hệ $\{f_1, f_2, ..., fk\} \subseteq F$ là một ***lời giải*** của bài toán $A \rightarrow B$ nếu như ta lần lượt áp dụng các quan hệ fi (i=1,...,k) xuất phát từ giả thiết A thì sẽ tính được các biến thuộc B. Lời giải $\{f_1, f_2, ..., fk\}$ được gọi là ***lời giải tốt*** nếu không thể bỏ bớt một số bước tính toán trong quá trình giải, tức là không thể bỏ bớt một số quan hệ trong lời giải. Lời giải được gọi là ***lời giải tối ưu*** khi nó có số bước tính toán ít nhất, tức là số quan hệ áp dụng trong tính toán là ít nhất.

Việc tìm lời giải cho bài toán là việc tìm ra một dãy quan hệ để có thể áp dụng tính ra được B từ A. Điều nầy cũng có nghĩa là tìm ra được một quá trình tính toán để giải bài toán.

Trong quá trình tìm lời giải cho bài toán chúng ta cần xét một dãy quan hệ nào đó xem có thể tính thêm được các biến từ một tập biến cho trước nhờ dãy quan hệ nầy hay không. Do đó chúng ta đưa thêm định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 2.2

Cho D = $\{f_1, f_2, ..., fk\}$ là một dãy quan hệ của mạng tính toán (M,F), A là một tập con của M. Ta nói dãy quan hệ D là ***áp dụng được*** trên tập A khi và chỉ khi ta có thể lần lượt áp dụng được các quan hệ $f_1, f_2, ..., fk$ xuất phát từ giả thiết A.

Nhận xét : Trong định nghĩa trên, nếu đặt : $A_0 = A$, $A_1 = A_0 \cup M(f_1)$, . . . , $Ak = Ak_{-1} \cup M(fk)$, và ký hiệu Ak là **D(A)**, thì ta có D là một lời giải của bài toán A $\rightarrow$ D(A). Trong trường hợp D là một dãy quan hệ bất kỳ (không nhất thiết là áp dụng được trên A), ta vẫn ký hiệu D(A) là tập biến đạt được khi lần lượt áp dụng các quan hệ trong dãy D (nếu được). Chúng ta có thể nói rằng D(A) là sự mở rộng của tập A nhờ áp dụng dãy quan hệ D.

Thuật toán tính D(A)

Nhập : Mạng tính toán (M,F),

$A \subseteq M$,

dãy các quan hệ $D = \{f_1, f_2, ..., fm\}$.

Xuất : D(A).

Thuật toán :

1. A’ $\leftarrow$ A;
2. for i=1 to m do

   if fi áp dụng được trên A’ then

   A’ $\leftarrow$ A’ $\cup$ M(fi);
3. D(A) $\leftarrow$ A’

6.4. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

6.4.1. Tính giải được của bài toán

Trong mục này chúng ta nêu lên một khái niệm có liên quan đến tính giải được của vấn đề trên một mạng tính toán : bao đóng của một tập hợp biến trên một mạng tính toán.

Định nghĩa 3.1

Cho mạng tính toán (M,F), và A là một tập con của M. Ta có thể thấy rằng có duy nhất một tập hợp B lớn nhất $\subseteq$ M sao cho bài toán A $\rightarrow$ B là giải được, và tập hợp B được gọi là ***bao đóng*** của A trên mô hình (M,F). Một cách trực quan, có thể nói bao đóng của A là sự mở rộng tối đa của A trên mô hình (M,F). Ký hiệu bao đóng của A là $\overline{A}$, chúng ta có kiểm tra dễ dàng các tính chất liên quan đến bao đóng trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 3.1: Cho A và B là hai tập con của M. Ta có:

(1) $\overline{A} \supseteq A$.

(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(3) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(4) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(5) $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

Đối với tính giải được của bài toán, ta có thể dễ dàng kiểm chứng mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.2

(1) Bài toán $A \to B$ là giải được khi và chỉ khi các bài toán $A \to b$ là giải được với mọi $b \in B$.

(2) Nếu $A \to B$ và $B \to C$ là các bài toán giải được thì bài toán $A \to C$ cũng giải được. Hơn nữa, nếu $\{f_1, f_2, ..., fm\}$ và $\{g_1, g_2, ..., gp\}$ lần lượt là lời giải của bài toán $A \to B$ và bài toán $B \to C$ thì $\{f_1, f_2, ..., fm, g_1, g_2, ..., gp\}$ là một lời giải của bài toán $A \to C$.

(3) Nếu bài toán $A \to B$ là giải được và B' là một tập con của B thì $A \to B'$ cũng là một bài toán giải được. Hơn nữa, nếu $\{f_1, f_2, ..., fm\}$ là một lời giải của bài toán $A \to B$ thì đó cũng là một lời giải của bài toán $A \to B'$.

Từ khái niệm bao đóng đã nói ở trên ta cũng có các định lý sau:

Định lý 3.1. Trên một mạng tính toán (M,F), bài toán $A \to B$ là giải được khi và chỉ khi $B \subseteq \overline{A}$

Từ định lý này, ta có thể kiểm tra tính giải được của bài toán $A \to B$ bằng cách tính bao đóng của tập A rồi xét xem B có bao hàm trong $\overline{A}$ hay không.

Mệnh đề 3.3: Cho một dãy quan hệ $D = \{f_1, f_2, ..., fk\} \subseteq F$, $A \subseteq M$. Đặt :

$A_0 = A$, $A_1 = A_0 \cup M(f_1)$, ..., $Ak = Ak_{-1} \cup M(fk)$. Ta có các điều sau đây là tương đương :

(1) Dãy D áp được trên A.

(2) Với mọi i=1, ..., k ta có:

Card ($M(fi) \setminus Ai_{-1}$) $\leq$ r(fi) nếu fi là quan hệ đối xứng,

$M(fi) \setminus Ai_{-1} \subseteq v(fi)$ nếu fi là quan hệ không đối xứng.

(ký hiệu Card (X) chỉ số phần tử của tập X).

Ghi chú : Dựa vào mệnh đề 3.3 ta có một thuật toán để kiểm tra tính áp dụng được của một dãy quan hệ D trên một tập biến A.

Định lý 3.2. Cho một mạng tính toán (M,F), A, B là hai tập con của M. Ta có các điều sau đây là tương đương:

(1) $B \subseteq \overline{A}$.

(2) Có một dãy quan hệ $D = \{f_1, f_2, ..., fk\} \subseteq F$ thỏa các điều kiện :

(a) D áp được trên A.

(b) $D(A) \supseteq B$.

Chứng minh : Giả sử có (1), tức là $B \subseteq \overline{A}$. Khi đó bài toán $A \rightarrow B$ là giải được. Do đó có một dãy quan hệ $\{f_1, f_2, ..., fk\} \subseteq F$ sao cho khi ta lần lượt áp dụng các quan hệ fi (i=1,...,k) xuất phát từ giả thiết A thì sẽ tính được các biến thuộc B. Dễ dàng thấy rằng dãy $\{f_1, f_2, ..., fk\}$ nầy thỏa các điều kiện (2).

Đảo lại, giả sử có (2). Với các điều kiện có được bởi (2) ta thấy {fi} là lời giải của vấn đề $Ai_{-1} \rightarrow Ai$, với mọi i = 1,2, ..., k. Từ mệnh đề 3.2 suy ra bài toán $A_0 \rightarrow Ak$ là giải được. Do đó bài toán $A \rightarrow B$ cũng giải được, suy ra $B \subseteq \overline{A}$ theo định lý 3.1.

Nhận xét

1. Dãy quan hệ $\{f_1, f_2, ..., fk\}$ trong định lý trên là một lời giải của vấn đề $A \rightarrow B$ trên mạng tính toán (M,F).

2. Trong lời giải $\{f_1, f_2, ..., fk\}$ ta có thể bỏ bớt những fi nào mà $M(fi) \subseteq Di_{-1}(A)$, với $Di_{-1} = \{f_1, f_2, ..., fi_{-1}\}$.

Qua các định lý trên, ta thấy rằng việc xác định bao đóng của một tập biến trên mô hình tính toán là cần thiết. Dưới đây là thuật toán cho phép xác định bao đóng của tập hợp $A \subseteq M$. Trong thuật toán này chúng ta thử áp dụng các quan hệ $f \in F$ để tìm dần những biến thuộc M có thể tính được từ A; cuối cùng sẽ được bao đóng của A.

Thuật toán 3.1. Tìm bao đóng của tập $A \subseteq M$:

Nhập : Mạng tính toán (M,F),

$A \subseteq M$.

Xuất : $\overline{A}$

Thuật toán :

1. B ← A;
2. **Repeat**

   B1 ← B;

   for $f \in F$ **do**

   if (f đối xứng **and** Card (M(f) \ B) ≤ r(f)) **or** (f không đối xứng **and** M(f) \ B ⊆ v(f)) **then**

   begin

   B ← B ∪ M(f);

   F ← F \ {f}; // *loại f khỏi lần xem xét sau*

   end;

   Until B = B1;
3. $\overline{A}$ ← B;

Ghi chú : Trên đây ta đã nêu lên đặc trưng cho tính giải được của bài toán trên một mạng tính toán và chỉ ra thuật toán để kiểm tra khi nào bài toán là giải được. Ngoài ra chúng ta sẽ còn nêu lên cách để kiểm định giả thiết của bài toán; và trong trường hợp bài toán chưa đủ giả thiết có thể bổ sung thêm nếu được.

6.4.2. Lời giải của bài toán

Ở trên ta đã nêu lên cách xác định tính giải được của bài toán. Tiếp theo, ta sẽ trình bày cách tìm ra lời giải cho bài toán $A \rightarrow B$ trên mạng tính toán (M,F). Trước hết từ nhận xét sau định lý 3.2 ta có mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 3.4: Dãy quan hệ D là một lời giải của bài toán $A \rightarrow B$ khi và chỉ khi D áp dụng được trên A và $D(A) \supseteq B$.

Do mệnh đề trên, để tìm một lời giải ta có thể làm như sau: Xuất phát từ giả thiết A, ta thử áp dụng các quan hệ để mở rộng dần tập các biến có giá trị được xác định; và quá trình này tạo ra một sự lan truyền tính xác định trên tập các biến cho đến khi đạt đến tập biến B. Dưới đây là thuật toán tìm một lời giải cho bài toán $A \rightarrow B$ trên mạng tính toán (M,F).

Thuật toán 3.2: Tìm một lời giải cho bài toán $A \rightarrow B$:

Nhập : Mạng tính toán (M,F),
tập giả thiết $A \subseteq M$,
tập biến cần tính $B \subseteq M$.

Xuất : lời giải cho bài toán $A \rightarrow B$

Thuật toán :

1. Solution ← empty; // Solution *là dãy các quan hệ sẽ* //*áp dụng*

```
2. if  B ⊆ A  then
   begin
       Solution_found ← true; // biến Solution_found =
       // true khi bài toán là giải được
       goto 4;
   end
   else
       Solution_found ← false;
3. Repeat
       Aold ← A;
       Chọn ra một  f ∈ F chưa xem xét;
       while  not Solution_found  and (chọn được f)  do
       begin
           if  ( f đối xứng  and  0 < Card (M(f) \ A) ≤  r(f) )  or(
           f không đối xứng  and  ∅ ≠ M(f) \ A ⊆ v(f) )
           then
           begin
               A ← A ∪ M(f);
               Solution ← Solution ∪ {f};
           end;
           if  B ⊆ A  then
               Solution_found ← true;
               Chọn ra một  f ∈ F chưa xem xét;
       end;        { while }
   Until  Solution_found  or  (A = Aold);
4. if  not Solution_found  then
       Bài toán không có lời giải;
   else
       Solution là một lời giải;
```

Ghi chú

1. Về sau, khi cần trình bày quá trình giải (hay bài giải) ta có thể xuất phát từ lời giải tìm được dưới dạng một dãy các quan hệ để xây dựng bài giải.
2. Lời giải (nếu có) tìm được trong thuật toán trên chưa chắc là một lời giải tốt. Ta có thể bổ sung thêm cho thuật toán ở trên thuật toán để tìm một lời giải tốt từ một lời giải đã biết nhưng chưa chắc là tốt. Thuật toán sẽ dựa trên định lý được trình bày tiếp theo đây.

Định lý 3.3. Cho $D = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ là một lời giải của bài toán $A \rightarrow B$. ứng với mỗi $i = 1,...,m$ đặt $D_i = \{f_1, f_2, ..., f_i\}$, $D_0 = \varnothing$. Ta xây dựng một họ các dãy con $S_m, S_{m-1}, ..., S_2, S_1$ của dãy D như sau :

$S_m = \varnothing$ nếu D_{m-1} là một lời giải,
$S_m = \{f_m\}$ nếu D_{m-1} không là một lời giải,
$S_i = S_{i+1}$ nếu $D_{i-1} \cup S_{i+1}$ là một lời giải,
$S_i = \{f_i\} \cup S_{i+1}$ nếu $D_{i-1} \cup S_{i+1}$ không là một lời giải,

với mọi $i = m - 1, m - 2, ..., 2, 1$.

Khi đó ta có:

(1) $S_m \subseteq S_{m-1} \subseteq ... \subseteq S_2 \subseteq S_1$.

(2) $D_{i-1} \cup S_i$ là một lời giải của bài toán $A \rightarrow B$ với mọi $i = m, ..., 2, 1$.

(3) Nếu S'_i là một dãy con thật sự của S_i thì $D_{i-1} \cup S'_i$ không phải là một lời giải của bài toán $A \rightarrow B$ với mọi i.

(4) S_1 là một lời giải tốt của bài toán $A \rightarrow B$.

Từ định lý 3.3 trên ta có một thuật toán tìm lời giải tốt từ một lời giải đã biết sau đây:

Thuật toán 3.3. tìm một lời giải tốt từ một lời giải đã biết.

Nhập : Mạng tính toán (M,F),
lời giải $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ của bài toán $A \rightarrow B$.

Xuất : lời giải tốt cho bài toán $A \rightarrow B$

Thuật toán :

1. $D \leftarrow \{f_1, f_2, ..., f_m\}$;
2. **for** i=m **downto** 1 **do**
   if $D \setminus \{fi\}$ là một lời giải **then**
   $D \leftarrow D \setminus \{f_i\}$;
3. D là một lời giải tốt.

Trong thuật toán 3.3 có sử dụng việc kiểm tra một dãy quan hệ có phải là lời giải hay không. Việc kiểm tra này có thể được thực hiện nhờ thuật toán sau đây:

Thuật toán kiểm tra lời giải cho bài toán

Nhập : Mạng tính toán (M,F),
bài toán $A \rightarrow B$,
dãy các quan hệ $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$.

Xuất : thông tin cho biết $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ có phải là lời giải của bài toán $A \rightarrow B$ hay không.

Thuật toán :

1.**for** i=1 **to** m **do**
if (f_i đối xứng **and** $\mathrm{Card}(M(f_i) \setminus A) \leq r(f_i)$) **or**
(fi không đối xứng **and** $M(f_i) \setminus A \subseteq v(f_i)$) **then**
$A \leftarrow A \cup M(f_i)$;

2.**if** $A \supseteq B$ **then**
$\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ là lời giải

else

$\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ không là lời giải;

Ở trên ta đã có một thuật toán tổng quát để tìm lời giải tốt cho bài toán khi đã biết trước một lời giải. Tuy nhiên trong ứng dụng cụ thể ta thường gặp các quan hệ đối xứng có hạng một hơn là các quan hệ đối xứng có hạng lớn hơn 1. Trong trường hợp như thế ta có thể áp dụng một thuật toán khác để tìm một lời giải tốt từ một lời giải biết trước với mức độ tính toán ít hơn. Theo thuật toán nầy, ta lần lượt xem xét các quan hệ trong tập lời giải đã biết và chọn ra các quan hệ để đưa vào một lời giải mới sao cho trong lời giải mới này không thể bớt ra bất kỳ một quan hệ nào.

Thuật toán 3.4. Tìm một lời giải tốt từ một lời giải đã biết không chứa quan hệ đối xứng hạng > 1.

Nhập : Mạng tính toán (M,F),

Lời giải $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ của bài toán $A \rightarrow B$,

Điều kiện : f_i không phải là quan hệ đối xứng có hạng lớn hơn 1.

Xuất : lời giải tốt cho bài toán $A \rightarrow B$

Thuật toán :

1. NewSolution $\leftarrow \varnothing$; // *đầu tiên tập lời giải mới*

// *chưa có quan hệ nào.*

$A_0 \leftarrow A$;

for i=1 **to** m **do** $A_i = A_{i-1} \cup M(f_i)$;

2. // *Dò theo chỉ số i từ 0 tìm i đầu tiên sao cho $A_i \supseteq B$.*

$i \leftarrow 0$;

while not $(A_i \supseteq B)$ **do**

i ← i + 1;

3. **if** i = 0 **then** **goto** 8;

4. m ← i;

5. *// Ghi nhận fm trong lời giải mới.*

NewSolution ← { fm } ∪ NewSolution;

6. *// Dò theo chỉ số i từ 1 đến m – 1 tìm i đầu tiên (nếu có) // sao cho ta có thể áp dụng fm trên Ai để tính ra được // B.*

i_found ← false;

i ← 1;

while **not** i_found **and** (i ≤ m –1) **do**

if ((f_m đối xứng **and** Card ($M(f_m) \setminus Ai) \le r(f_m)$))

or (f_m không đối xứng **and** $M(f_m) \setminus Ai \subseteq v(f_m)$)

and ($B \subseteq M(f_m) \cup Ai$) **then**

i_found ← true

else

i ← i + 1;

7. **if** i_found **then**

begin

$B \leftarrow (B \cup M(f_m)) \cap Ai$;

goto 2;

end;

8. NewSolution là một lời giải tốt của bài toán A → B.

Ví dụ : Bây giờ ta xét một ví dụ cụ thể để minh họa cho các thuật toán trên.

Cho tam giác ABC có cạnh a và hai góc kề là β, γ được cho trước.

Tính diện tích S của tam giác.

Để tìm ra lời giải cho bài toán trước hết ta xét mạng tính toán của tam giác. Mạng tính toán này gồm :

1. Tập biến M = {a, b, c, α, β, γ, ha, hb, hc, S, p, R, r, ...}, trong đó a, b, c là ba cạnh; α, β, γ là ba góc tương ứng với ba cạnh; ha, hb, hc là ba đường cao; S là diện tích tam giác; p là nửa chu vi; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác; r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác...

2. Các quan hệ

f_1 : $\alpha + \beta + \gamma = 180$

f_2 : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$

f_3 : $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{b}{\sin\beta}$

f_4 : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

f_5 : $p = (a+b+c)/2$

f_6 : $S = a.ha / 2$

f_7 : $S = b.hb / 2$

f_8 : $S = c.hc / 2$

f_9 : $S = a.b.\sin\gamma / 2$

f_{10} : $S = b.c.\sin\alpha / 2$

f_{11} : $S = c.a.\sin\beta / 2$

f_{12} : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

v.v ...

3. Yêu cầu tính : S (diện tích của tam giác).

Theo đề bài ta có giả thiết là : A = {a, β, γ}, và tập biến cần tính là B = {S}.

Áp dụng thuật toán tìm lời giải (thuật toán 3.2) ta có một lời giải cho bài tính là dãy quan hệ sau:

$\{f_1, f_2, f_3, f_5, f_9\}$.

Xuất phát từ tập biến A, lần lượt áp dụng các quan hệ trong lời giải ta có tập các biến được xác định mở rộng dần đến khi S được xác định :

$\{a, \beta, \gamma\} \xrightarrow{f_1} \{a, \beta, \gamma, \alpha\} \xrightarrow{f_2} \{a, \beta, \gamma, \alpha, b\} \xrightarrow{f_3}$ $\{a, \beta, \gamma, \alpha, b, c\} \xrightarrow{f_5} \{a, \beta, \gamma, \alpha, b, c, p\} \xrightarrow{f_9} \{a, \beta, \gamma, \alpha, b, c, p, S\}$.

Có thể nhận thấy rằng lời giải này không phải là lời giải tốt vì có bước tính toán thừa, chẳng hạn là f_5. Thuật toán 3.3 hay thuật toán 3.4 sẽ lọc ra từ lời giải trên một lời giải tốt là $\{f_1, f_2, f_9\}$:

$\{a, \beta, \gamma\} \xrightarrow{f_1} \{a, \beta, \gamma, \alpha\} \xrightarrow{f_2} \{a, \beta, \gamma, \alpha, b\} \xrightarrow{f_9}$ $\{a, \beta, \gamma, \alpha, b, S\}$.

Theo lời giải này, ta có quá trình tính toán như sau :

bước 1: tính α (áp dụng f_1).

bước 2: tính b (áp dụng f_2).

bước 3: tính S (áp dụng f_9).

Quá trình tính toán (gồm ba bước) này có thể được diễn đạt một cách rõ ràng trên sơ đồ mạng hình 6.3.

6.4.3. Lời giải tối ưu của bài toán